

Установим зависимость проекций вектора угловой скорости на оси координат, скрепленные с телом, от углов Эйлера ψ , θ , φ и их производных по времени.

496

Тело, имеющее неподвижную точку O , движется относительно осей координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 136). С движущимся телом скреплена система подвижных осей координат $Oxyz$, движение которой и характеризует движение рассматриваемого твердого тела относительно осей $Ox_1y_1z_1$. Положение подвижной системы координат относительно неподвижной, а следовательно, и положение самого движущегося тела определяются тремя углами Эйлера: ψ , θ , φ .

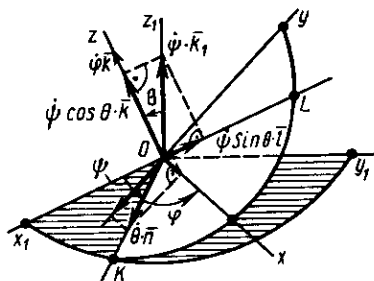


Рис. 136

Изменение угла прецессии ψ , образованного координатной осью Ox_1 и линией узлов OK , которая является линией пересечения координатных плоскостей Ox_1y_1 и Oxy , соответствует вращению тела вокруг оси прецессии Oz_1 , перпендикулярной линиям, образующим угол, с угловой скоростью $\dot{\psi}\bar{k}_1$, направленной по этой оси. Здесь $\bar{k}_1$ — единичный вектор оси Oz_1 .

При изменении угла нутации θ , заключенного между осями координат Oz_1 и Oz , тело вращается вокруг перпендикулярной этим осям линии узлов OK с угловой скоростью $\dot{\theta}\bar{n}$, где $\bar{n}$ — единичный вектор, направленный в положительную сторону линии узлов.

Изменение угла собственного вращения φ , образованного координатной осью Ox и линией узлов OK , приводит к вращению тела вокруг оси собственного вращения Oz , перпендикулярной этим линиям, с угловой скоростью $\dot{\varphi}\bar{k}$, где $\bar{k}$ — единичный вектор оси Oz .

При изменении углов Эйлера ψ , θ и φ движение тела можно рассматривать как сложное, состоящее из трех вращений вокруг пересекающихся осей Oz_1 , OK и Oz с угловыми скоростями $\dot{\psi}\bar{k}_1$, $\dot{\theta}\bar{n}$ и $\dot{\varphi}\bar{k}$ соответственно. Совокупность этих трех вращений эквивалентна вращению тела вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$, направленной по этой оси.

По теореме о сложении вращений вокруг пересекающихся осей имеем

$$\bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{k}_1 + \dot{\theta}\bar{n} + \dot{\varphi}\bar{k}. \quad (16)$$

Определим проекции вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ на подвижные оси координат $Oxyz$, скрепленные с телом. Движение тела при этом рассматривается относительно неподвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$. При проецировании на оси координат $Oxyz$ векторной суммы правой части (16) следует проецировать на эти оси каждый из слагаемых векторов.

Вектор угловой скорости $\dot{\varphi}\bar{k}$ направлен по оси Oz и дает проекцию на эту ось, равную $\dot{\varphi}$, так как он перпендикулярен двум другим осям: Ox и Oy .

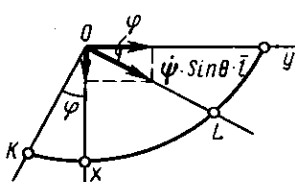


Рис. 137

по осям Ox и Oy имеет составляющую в отрицательном направлении оси Oy . Проецируемый вектор $\dot{\theta}\bar{n}$ перпендикулярен оси Oz , и его проекция на эту ось равна нулю.

Для того чтобы спроецировать на оси координат $Oxyz$ вектор $\dot{\psi}\bar{k}_1$, его следует предварительно разложить на две перпендикулярные составляющие, одна из которых направлена по оси Oz , а другая перпендикулярная составляющая расположится в плоскости осей координат Ox и Oy . Имеем

$$\dot{\psi}\bar{k}_1 = \dot{\psi}\cos\theta\bar{k} + \dot{\psi}\sin\theta\bar{l}, \quad (17)$$

где $\bar{l}$ — единичный вектор, направленный по линии OL . При проецировании вектора $\dot{\psi}\bar{k}_1$ на оси координат следует проецировать на эти оси каждый вектор из правой части (17). Вектор $\dot{\psi}\cos\theta\bar{k}$ дает проекцию $\dot{\psi}\cos\theta$ только на ось Oz . Остается спроецировать вектор $\dot{\psi}\sin\theta\bar{l}$, расположенный в плоскости осей координат Ox и Oy , на эти оси. В плоскости этих осей расположится также линия узлов OK (рис. 137). Линия OL , по которой направлен проецируемый вектор $\dot{\psi}\sin\theta\bar{l}$, и линия узлов взаимно перпендикулярны, так как линия узлов перпендикулярна осям координат Oz и Oz_1 , а следовательно, она перпендикулярна и линии OL , расположенной в плоскости этих осей. Угол φ между осями Ox и OK является также углом между перпендикулярными к ним осями Oy и OL . Таким образом, проекция вектора $\dot{\psi}\sin\theta\bar{l}$ на ось Oy равна $\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi$, а на ось Ox — $\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$.

Собирая вместе проекции на оси координат векторов, входящих в правую часть (16), с учетом полученных проекций векторов из правой части (17) получим кинематические уравнения Эйлера.

Выразим дополнительно косинусы углов оси прецессии Oz_1 с осями координат $Oxyz$, скрепленными с движущимся телом, через углы Эйлера. По оси прецессии Oz_1 направлен вектор угловой скорости $\dot{\psi}\bar{k}_1$. Поэтому множители при $\dot{\psi}$ в формулах для ω_x , ω_y , ω_z и есть искомые косинусы указанных выше углов. Обозначая их для краткости γ_1 , γ_2 , γ_3 , получаем

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \cos(z_1, \hat{x}) = \sin\theta\sin\varphi; \\ \gamma_2 &= \cos(z_1, \hat{y}) = \sin\theta\cos\varphi; \\ \gamma_3 &= \cos(z_1, \hat{z}) = \cos\theta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$